

Л 6. Линии и поверхности второго порядка. Исследование уравнения второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола

Рассмотрим в начале частные виды кривых, определяемых на плоскости уравнениями, в которых неизвестные x и y присутствуют только в первой или во второй степени.

1. Пусть на плоскости Oxy имеются две точки F_1 и F_2 , называемые фокусами на расстоянии $2c$ друг от друга ($2c$ – фокусное расстояние). Для определенности расположим их на оси Ox симметрично относительно начало координат, т.е. $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Пусть $2a > 2c$.

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек M плоскости, сумма расстояний, от которых до двух выбранных фокусов, постоянна и равна $2a$.

Разделив части уравнения на a^2b^2 , получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса, а числа a и b его полуосями (большой и малой). Подставив в каноническое уравнение значение $y = 0$, получим $\frac{x^2}{a^2} = 1$; $x^2 = a^2$, $x = \pm a$, т.е. эллипс пересекает ось Ox в точках с координатами $x = \pm a$. Аналогично проверяется, что ось Oy эллипс пересекает в точках $y = \pm b$. Эти точки пересечения эллипса с осями координат называются вершинами эллипса.

Несложно проверить, что т. O является центром симметрии эллипса, описываемого каноническим уравнением, а оси Ox и Oy его осями симметрии. Ось, проходящая через фокусы эллипса (ось Ox), называется его фокальной осью. Число $e = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом U эллипса $0 \leq e < 1$. Прямые, проходящие перпендикулярно фокальной оси на расстоянии $d = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ от центра эллипса, называются директрисами эллипса.

2. В частном случае, когда фокусное расстояние эллипса $2c = 0$, два фокуса эллипса совпадают с его центром. При этом $a = b$ и каноническое уравнение эллипса принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением окружности радиуса a . У окружности эксцентриситет $e = 0$, а директрисы отсутствуют.

Уравнение окружности радиуса a с центром в точке $O'(x_0, y_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

Пример. Запишем уравнение окружности с центром в точке $M_0(3, 4)$, проходящей через начало координат. Поскольку радиус окружности

$a = |OM_0| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, то уравнение этой окружности имеет вид $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Гипербола. Пусть на плоскости имеются два фокуса (например $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$) и пусть $a < c$.

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек M плоскости, разность расстояний от которых до двух выбранных фокусов постоянна и равна $\pm 2a$. И каноническим уравнением гиперболы записывается так

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Число a называется действительной полуосью гиперболы, а число b – ее мнимой полуосью

Подставив в каноническое уравнение $y = 0$, получим $x^2 = a^2$, т.е. $x = \pm a$, следовательно, гипербола пересекает ось Ox в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$. Эти точки называются вершинами гиперболы. Подставив в каноническое уравнение $x = 0$, получим $-\frac{y^2}{b^2} = 1$. Это уравнение не имеет, поэтому гипербола с каноническим уравнением с осью Oy не пересекается. Как и у эллипса, т.о. является центром симметрии гиперболы, а оси Ox и Oy ее осями симметрии.

Определения эксцентриситета и директрис гиперболы повторяют соответствующие определения для эллипса. Эксцентриситет гиперболы $e > 1$.

Определение. Прямая L называется асимптотой кривой K , если расстояние от точки на кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки вдоль кривой в бесконечность.

Это определение не вполне корректно. Точное определение асимптоты опирается на понятие предела, которое будет изучаться позже. В четвертом модуле будет приведено доказательство следующего факта. Прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ являются асимптотами обеих ветвей гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Парабола. Пусть на плоскости имеется прямая D (директриса) и точка F (фокус) на расстоянии p от директрисы. Пусть D имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$, фокус – координаты $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Определение. Параболой называется геометрическое место точек M плоскости, расстояние от которых до фокуса совпадает с расстоянием до директрисы (см. рис. 2.19).

- 1.5. Уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ и $x^2 = -1$ - пустое множество.

1.6 Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ - пара пересекающихся по оси Oz плоскостей

1.7. $x^2 = a^2$ - пара плоскостей, параллельных Oyz .

1.8 $x^2 = 0$ - плоскость Oyz .

Все перечисленные поверхности называются цилиндрическими поверхностями второго порядка.

1. Пусть в пространстве имеется кривая K и точка O , не лежащая на K .

Определение. Конической поверхностью (конусом) с направляющей K и вершиной O называется геометрическое место точек пространства, лежащих на прямых, проходящих через O и пересекающих K .

В частности, конические поверхности, рассматриваемые в школьной программе, имели направляющие окружности K , их вершины находились на прямой, проходящей через центр K перпендикулярно плоскости окружности

Заметим, что вершина O любой конической поверхности является ее центром симметрии.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ($a, b, c > 0$) называется каноническим уравнением конуса второго порядка.

1. Поверхность, определяемая каноническими уравнениями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ($a, b, c > 0$)

называется эллипсоидом, а числа a, b, c — его полуосями

2. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, ($a, b, c > 0$)

называется двуполостным гиперболоидом

3. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, ($a, b, c > 0$)

называется однополостным гиперболоидом

4. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$, ($p, q > 0$) называется эллиптическим параболоидом

5. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$, ($p, q > 0$) называется гиперболическим параболоидом

6. Определение. Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Здесь хотя бы один коэффициент $a_{i,j}$ должен быть отличен от нуля.

Теорема. Любая поверхность второго порядка в пространстве является одной из следующих поверхностей

- 1) одной из цилиндрических поверхностей второго порядка;
- 2) конусом второго порядка;
- 3) Эллипсоидом;
- 4) одно или двуполостным гиперболоидом;
- 5) эллиптическим или гиперболическим параболоидом

Найдется, такая декартова система координат $O'x'y'z'$, в которой уравнение поверхности принимает канонический вид